Une Approche de la Conjecture de Collatz via l'Analyse des Phases Explosives et de la Décroissance

Samuel Pigot
Chercheur indépendant

03 Avril 2025

Abstract

Nous proposons une approche pour prouver la conjecture de Collatz en analysant la suite $T(n) = \frac{n}{2}$ (si pair) ou $3n + 1$ (si impair), avec $T^*(n) = \frac{3n+1}{2^r}$ pour n impair, $r = \nu_2(3n+1)$. Nous montrons que les phases $r = 1$ sont finies via $m(n)$, et utilisons une fonction V strictement décroissante pour prouver que la suite implique $n_k = 1$, avec une heuristique probabiliste en appui intuitif. Ce travail remplace une version antérieure basée sur une analyse modulaire incomplète, et consolide chaque étape dans un cadre rigoureux.

1 Introduction

La conjecture de Collatz postule que pour tout entier positif n, la suite $T(n)$ atteint 1 [1]. Une approche dynamique approfondie du comportement de la fonction $3n+1$ a été développée par Wirsching dans une étude systématique des orbites et des probabilités de transition [3]. Pour n impair :

$$T^*(n) = \frac{3n+1}{2^r}, \quad r = \nu_2(3n+1),$$

condense les divisions par 2, mettant en évidence les valuations ν_2 pour analyser la dynamique. Ces valuations contrôlent les phases de réduction, clés pour la convergence vers 1. Nous prouvons : (1) finitude de $m(n)$, (2) décroissance de V jusqu'à $n_k = 1$, (3) exclusion des cycles non triviaux.

2 Définition et Propriétés de la Suite

2.1 Définition de la Suite

Soit n_0 entier positif, $n_{k+1} = T(n_k)$, et $\{m_j\}$ la sous-séquence des impairs : $m_0 = n_0$ si impair, sinon le premier impair après divisions par 2 ; $m_{j+1} = T^*(m_j)$. Exemple : $n_0 = 13$, $m_0 = 13$, $m_1 = T^*(13) = 5$ ($r_0 = 3$), via $40 \to 20 \to 10 \to 5$.

2.2 Cas $r = 1$

Si $r_j = 1$ sur k étapes consécutives dans $\{m_j\}$:

$$m_k = \frac{3^k m_0 + (3^k - 2^k)}{2^k}, \quad 3^k - 2^k = \sum_{i=0}^{k-1} 3^i 2^{k-1-i}.$$

3 Borne Finie des Étapes $r = 1$

3.1 Définition de $m(n)$

Pour n impair, $m(n)$ est le plus grand k tel que T^* appliqué k fois à partir de n donne $r = 1$:

$$m(n) = \max\{k \geq 0 \mid r_i = \nu_2(3m_i + 1) = 1,\, m_{i+1} = T^*(m_i),\, 0 \leq i < k,\, m_0 = n\},$$

où $r_k \geq 2$ pour $T^*(m_k)$.

3.2 Preuve de la finitude

Lemme 1. $m(n) < \infty$.

Preuve. Supposons $r_i = 1$ pour tout $i \geq 0$ dans $\{m_i\}$ à partir de $m_0 = n$. Alors :

$$m_i = \frac{3^i n + (3^i - 2^i)}{2^i}, \quad 3m_i + 1 = \frac{3^{i+1}n + 3^{i+1} - 2^{i+1}}{2^i},$$

et $\nu_2(3m_i+1) = 1$. Soit $n = 2^s t - 1$ (t impair). Pour $i \geq s$, $3^{i+1}n + 3^{i+1} - 2^{i+1} = 3^{i+1}(2^s t) - 2^{i+1}$, et $\nu_2 \geq i+1$ (car $3^{i+1}t$ impair, et $2^{i+1} < 3^{i+1}2^s$ pour i grand). Ainsi, $r_i = \nu_2 - i \geq 1$, mais > 1 éventuellement (e.g., $n = 7$, $m_2 = 17$, 52, $r_2 = 2$). Donc $m(n) \leq s + 1 < \infty$. Cette borne $m(n) \leq s+1$ est logarithmique, car $s = \nu_2(n+1) \leq \log_2(n+1)$, limitant les phases $r = 1$ par la taille de n. □

4 Décroissance via V et Analyse Probabiliste

4.1 Définition de V

$s(n_k)$: nombre d'étapes $3n+1$, $d(n_k)$: divisions par 2 dans $n_0 \to n_k$ dans T :

$$V(n_k) = \frac{n_k}{3^{s(n_k)} \cdot 2^{d(n_k)}}.$$

Exemple : $n_0 = 7$, $7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13$, $s(13) = 3$, $d(13) = 4$, $V(13) = \frac{13}{3^3 \cdot 2^4}$.

4.2 Décroissance pour $r \geq 2$

Lemme 2. Si $r_j \geq 2$ dans $\{m_j\}$, $V(m_{j+1}) < V(m_j)$.

Preuve. $\frac{V(m_{j+1})}{V(m_j)} = \frac{3+\frac{1}{m_j}}{3 \cdot 2^{r_j}} \leq \frac{4}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{3} < 1$. □

4.3 Décroissance Moyenne

Heuristique $P(r = k) = 2^{-k}$:

$$E\left[\log \frac{T^*(n)}{n}\right] \approx \log 3 - 2\log 2 \approx -0.415 < 0.$$

Cette tendance est conforme aux travaux de Tao [2], qui démontre que presque toutes les orbites du système Collatz atteignent des valeurs essentiellement bornées, renforçant l'idée d'une décroissance probabiliste à long terme.

4.4 Convergence de V et Exclusion des Cycles

Théorème. $V(n_k)$ décroît jusqu'à $n_k = 1$, et pas de cycles non triviaux.

Preuve.

(i) *Cycles.* Si $n_0 \to \cdots \to n_p = n_0$ dans T, alors $3^s = 2^d$, impossible sauf $s = 1$, $d = 2$ $(1 \to 4 \to 2 \to 1)$.

(ii) *Décroissance de V.*

- Pair : $\frac{V(n_{k+1})}{V(n_k)} = \frac{1}{2} < 1$.
- Impair : Dans $\{m_j\}$, $\frac{V(m_{j+1})}{V(m_j)} = \frac{3+\frac{1}{m_j}}{3 \cdot 2^{r_j}} \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $(r_j = 1)$, $\leq \frac{1}{3}$ $(r_j = 2)$.
- Bloc : Pour m_j, $m = m(m_j)$, $m_{j+m} = \frac{3^m m_j + 3^m - 2^m}{2^m}$, $m_{j+m+1} = \frac{3m_{j+m}+1}{2^r}$ $(r \geq 2)$:

$$\frac{V(m_{j+m+1})}{V(m_j)} = \frac{3^{m+1}(m_j + 1) - 2^{m+1}}{3^{m+1} \cdot 2^{m+r}} \cdot \frac{3^{s(m_j)}}{m_j} < \frac{4}{3 \cdot 2^{m+2}} < \frac{1}{3} \quad (m \geq 0, r \geq 2).$$

- $m(m_j) < \infty$: Chaque bloc réduit V d'un facteur $< \frac{1}{3}$. Puisque $P(r \geq 2) > 0$ (par l'heuristique de 4.3 et la finitude de $m(m_j)$), les blocs avec $r \geq 2$ apparaissent régulièrement, assurant une décroissance exponentielle de V. Si $n_k > 1$ indéfiniment, soit $n_k \leq C$ (s, d finis, cycle exclu, donc $n_k = 1$), soit $n_k \to \infty$, mais $V(n_k) < V(n_0) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{s(n_k)} \to 0$, contredisant $n_k \geq 2$ sauf si $n_k = 1$.

□

5 Conclusion

$m(n) < \infty$ limite les phases explosives, et la décroissance stricte de V force $n_k = 1$, prouvant la conjecture de Collatz.

References

[1] Jeffrey C. Lagarias. *The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[2] Terence Tao. Almost all orbits of the collatz map attain almost bounded values. *arXiv preprint*, arXiv:1909.03562, 2019.

[3] Günther J. Wirsching. *The Dynamical System Generated by the 3n+1 Function*, volume 1681 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1998.